3 Ermittlung von Prognosedaten

- Mit einer geeigneten Prognose der Nachfrage beginnt jede Planung von Produktions- und Dienstleistungsprozessen
- Daher sind entsprechende Anwendungssysteme einzusetzen
- Wir unterscheiden folgende Arten von Prognoseverfahren, die unter bestimmten Gegebenheiten Anwendung finden können
  - Qualitative Prognosen
  - Kausalanalysen
  - Zeitreihenprognosen

Szenarien

Bestimmung Prognoseziel	Festlegung Horizont	Auswahl Verfahren	Erhebung Daten	Erstellung Prognose	Über-wachung
Fluggesellschaft					
Bestimmung Flottenkapazität	Jährliche Nachfrage über 20 Jahre	Qualitative Prognose	Vergangen-heitsdaten Expertenbe-fragung	Experten-schätzung	Jährlich
Lebensmittelhändler					
Ermittlung Bestellmengen	Tägliche Nachfrage über 30 Tage	Zeitreihen-prognose	Point-of-sale Daten	Einfache exponentielle Glättung	Täglich
Telekommunikationsunternehmen					
Ermittlung Servicemit-arbeiterbedarf	Monatlicher Reparaturbe-darf über 1 Jahr	Kausalanalyse	Anzahl installierter Systeme und Ausfallraten	Lineare Regression	Monatlich

Quelle: Thonemann (2010) S.31

3.1 Qualitative Prognose

- Derartige Verfahren kommen zur Anwendung wenn
  - keine repräsentative Daten der Vergangenheit vorliegen und
  - keine operationalisierbaren Zusammenhänge bekannt sind, die einen quantitativen Rückschluss auf mögliche zukünftige Absatzmengen erlauben
- Sie können aber auch der Akzeptanz von quantitativen Prognosen dienen, indem sie diese Ergebnisse bestätigen
- Einsatz erfolgt meist bei Einführung neuer Produkte oder beim Eintritt in neue Märkte

Methoden

- Vertriebsschätzung
  - Die Vertriebsmitarbeiter nutzen ihr Expertenwissen aus Kundenkontakten und Erfahrungen
  - Verdichtung der Ergebnisse
- Kundenbefragung
  - Repräsentative Kunden und potenzielle Kunden werden gezielt angesprochen (z.B. Automobilindustrie)
  - Aufwendiger als die Vertriebsschätzung
  - Wird dann bevorzugt oder zusätzlich beschritten, falls entstehende „Flops“ erhebliche Belastungen darstellen
- Expertenschätzung
  - Top Manager unterschiedlicher Funktionen geben ihre Einschätzung ab
  - Verdichtung der Ergebnisse

Einsatz von Decision Support Systemen

- Qualitative Prognosetechniken lassen sich meist nur in der Auswertungsebene durch DSSe unterstützen
- Dabei empfiehlt sich die Nutzung spezieller Auswertungsprogramme
  - Einsatz von Rangwertverfahren zur Ergebnisverdichtung
  - Statistische Auswertungen von Kundenumfragen
  - In speziellen Fällen ist auch der Einsatz von Expertensystemen zu erwägen

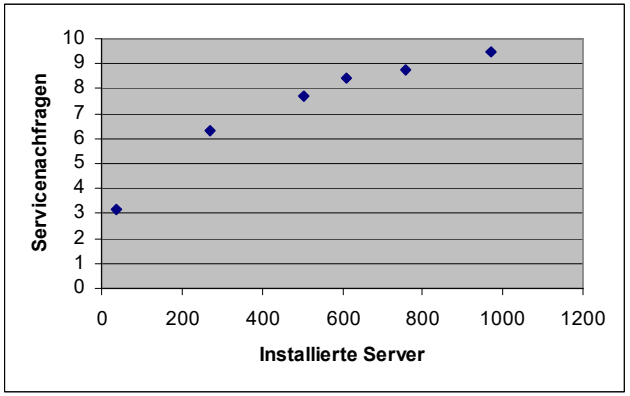
3.2 Kausalprognose

- Kausalprognosen leiten Nachfragemengen anhand bekannter Größen her, d.h. es ist ein kausaler Zusammenhang bekannt, der sich geeignet operationalisieren lässt
- Wir haben also eine Situation bei der
  - wir eine Größe haben, die wir genau operationalisieren können und
  - deren Ausprägung die Nachfrage funktional beeinflusst
- Im Folgenden betrachten wir ein einfaches Beispiel (vgl. Thonemann (2010) S.39ff)
  - Ein Softwareunternehmen mit sechs Standorten, das zur Kundenbetreuung Servicetechniker beschäftigt, möchte seine Kundennachfrage prognostizieren
  - Dazu sind die zukünftigen Servicenachfragen (in Mannjahren) zu determinieren
  - Offensichtlich ergibt sich hierbei ein kausaler Zusammenhang zu den installierten Servern in den Regionen

Servicenachfrage nach Regionen

Region	Installierte Server	Servicenachfragen [Mannjahre]
1	36	3,15
2	270	6,3
3	504	7,7
4	612	8,4
5	756	8,75
6	972	9,45

Illustration



siehe Thonemann (2010) S.39

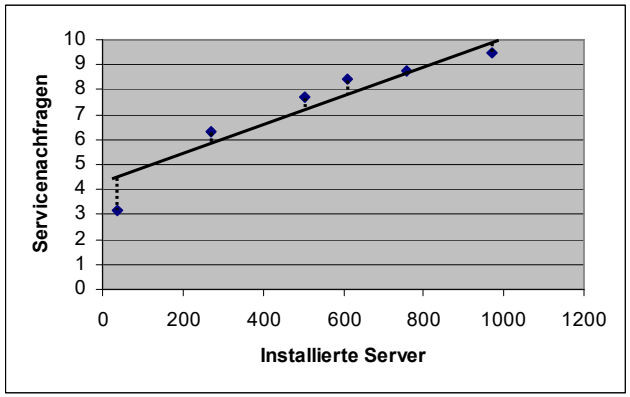
Weitergehende Probleme

- Ist die Zahl der installierten Server die einzige und entscheidende Einflussgröße?
- Wie sieht die Grundstruktur des funktionalen Zusammenhangs aus?
  - Linear
    - Hier können wir eine Prognosefunktion der Form $f(x)=a+b\cdot x$ einsetzen
    - Damit sind passende Werte für a und b zu ermitteln
    - Wie ist die Qualität einer gefundenen Funktion zu bewerten? Welche Fehlerfunktion soll verwendet werden?
  - Nicht linear
    - Hier liegt ein komplexerer Zusammenhang vor
    - Wiederum ist nach einer geeigneten Fehlerfunktion zu fragen

3.2.1 Lineare Regression

- Bei Verfahren, die auf der Basis der linearen Regression beruhen, wird ein linearer Zusammenhang zwischen der bekannten Größe und der Nachfrage unterstellt
- Damit wird die lineare Funktion gesucht, die den geringsten Fehler zu den ermittelten Messpunkten aufweist, d.h.
  - wir vergleichen die Zielfunktionswerte der Funktion an den Messpunkten mit den Messpunkten
  - also (x_n, y_n) mit $f(x_n)$
- Die Fehlermessung erfolgt häufig durch ein quadratisches Maß
  - Höhere Gewichtung größerer Fehler
  - Viele kleine Fehler sind besser als ein großer

Illustration – Lineare Regression



siehe Thonemann (2010) S.39

Fehlerfunktion

- Wir können nun leicht den durchschnittlichen Fehler („Mean Squared Error"=MSE) einer allgemeinen Prognosefunktion angeben $$MSE(a,b)=\frac{1}{N}\cdot\sum_{n=1}^{N}\left(\hat{y}_n-y_n\right)^2$$
- Wir verwenden eine lineare Prognosefunktion $\hat{y}_n=a+b\cdot x_n$
- Für uns sind die Werte für a und b interessant, die zu minimalen MSEs führen
- Die Funktion *MSE(a,b)* ist konvex für positive Stützstellen, d.h. für positive Werte von $x_1,\ldots,x_n$ Damit lässt sich ein Tupel *(a,b)* finden, das die Gesamtfunktion minimiert
- Hierfür sind die partiellen Ableitungen zu betrachten

Lineare Regression – Partielle Ableitungen

Wir formen deshalb die partiellen Ableitungen um…

$$\frac{\partial MSE(a,b)}{\partial a} = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{N} \cdot \sum_{n=1}^{N} (a + b \cdot x_n - y_n) = 0$$

$$\Leftrightarrow a + b \cdot \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=1}^{N} x_n - \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=1}^{N} y_n = 0$$

$$\Leftrightarrow a \cdot \sum_{n=1}^{N} x_n + b \cdot \frac{1}{N} \cdot \left(\sum_{n=1}^{N} x_n \right)^2 = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=1}^{N} y_n \cdot \sum_{n=1}^{N} x_n$$

$$\frac{\partial MSE(a,b)}{\partial b} = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{N} \cdot \sum_{n=1}^{N} (a + b \cdot x_n - y_n) \cdot x_n = 0$$

$$\Leftrightarrow a \cdot \sum_{n=1}^{N} x_n + b \cdot \sum_{n=1}^{N} (x_n)^2 = \sum_{n=1}^{N} x_n \cdot y_n$$

Bestimmung der Parameter *a* und *b*

… und erhalten folgendes Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{l} a \cdot \sum_{n=1}^{N} x_n + b \cdot \frac{1}{N} \cdot \left(\sum_{n=1}^{N} x_n \right)^2 = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=1}^{N} x_n \cdot \sum_{n=1}^{N} y_n \\ a \cdot \sum_{n=1}^{N} x_n + b \cdot \sum_{n=1}^{N} (x_n)^2 = \sum_{n=1}^{N} x_n \cdot y_n \end{array} \right|$$

Nach Subtraktion der ersten von der zweiten Gleichung…

$$b \cdot \left[\sum_{n=1}^{N} (x_n)^2 - \frac{1}{N} \cdot \left(\sum_{n=1}^{N} x_n \right)^2 \right] = \sum_{n=1}^{N} x_n \cdot y_n - \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=1}^{N} x_n \cdot \sum_{n=1}^{N} y_n$$

$$\Leftrightarrow b \cdot \left[\frac{1}{N} \cdot \sum_{n=1}^{N} (x_n)^2 - \frac{1}{N^2} \cdot \left(\sum_{n=1}^{N} x_n \right)^2 \right] = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=1}^{N} x_n \cdot y_n - \frac{1}{N^2} \cdot \sum_{n=1}^{N} x_n \cdot \sum_{n=1}^{N} y_n$$

Bestimmung der Parameter *a* und *b*

… erhalten wir für *b*

$$\Leftrightarrow b = \frac{\frac{1}{N} \cdot \sum_{n=1}^{N} x_n \cdot y_n - \frac{1}{N^2} \cdot \sum_{n=1}^{N} x_n \cdot \sum_{n=1}^{N} y_n}{\frac{1}{N} \cdot \sum_{n=1}^{N} (x_n)^2 - \frac{1}{N^2} \cdot \left(\sum_{n=1}^{N} x_n \right)^2} = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} = \frac{Cov(x,y)}{Var(x)}$$

Damit kann nun der Parameter *b* in die erste partielle Ableitung nach *a* eingesetzt werden

$$a + b \cdot \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=1}^{N} x_n^{\ 2} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=1}^{N} y_n \Leftrightarrow a = \overline{y} - b \cdot \overline{x}$$

Anwendung auf das Beispiel

Region	Installierte Server (x_n)	Servicenachfragen [Mannjahre] (y_n)	x_n^2	y_n^2	$x_n \cdot y_n$
1	36	3,15	1296	9,9225	113,4
2	270	6,3	72900	39,69	1701
3	504	7,7	254016	59,29	3880,8
4	612	8,4	374544	70,56	5140,8
5	756	8,75	571536	76,5625	6615
6	972	9,45	944784	89,3025	9185,4
Summe	**3.150**	**43,75**	**2.219.076**	**345,3275**	**26.636,4**

Beispiel – Ergebnis

- Wir erhalten somit als Parameter der Funktion

$$\boxed{\begin{aligned} a &= 3{,}885638552 \\ b &= 0{,}006487673 \end{aligned}}$$

- Es ergeben sich die folgenden Fehler

Servicenachfrage (y_n)	Funktionswert	MSE
3,15	4,119194765	0,156556416
6,3	5,637310154	0,073192972
7,7	7,155425542	0,04942689
8,4	7,856094183	0,04930559
8,75	8,790319037	0,000270937
9,45	10,19165632	0,091675683
43,75		**0,420428487**

Qualität der Prognose

- Kann man die Nachfrage in dem dargestellten Beispiel hinsichtlich des MSE noch besser prognostizieren?
- Mit einer linearen Regression?
  - Natürlich nicht!
  - Hier haben wir die optimale Lösung ermittelt und angewendet
- Möglicherweise aber doch, wenn der lineare Zusammenhang nicht wie angenommen existiert
- Dies ist eine Fragestellung einer nicht-linearen Regression, der wir uns im Folgenden zuwenden wollen

3.2.2 Nicht-Lineare Prognosefunktion

- Bisher wurde ein linearer Zusammenhang zwischen der beobachtbaren und messbaren Größe und der zu prognostizierenden Nachfrage unterstellt
- Allerdings muss dies nicht zutreffen
- Besonders problematisch ist,
  - dass in diesem Fall viele verschiedene Verläufe der Prognosefunktion in Frage kommen
  - und dass diese Zusammenhänge im Vorfeld nicht bekannt sind
- Wir werden nun verschiedene Vorgehensweisen zur nicht-linearen Progression kennen lernen und für das kleine Beispiel exemplarisch anwenden

Vereinfachungen

- Im Idealfall lässt sich eine nicht-lineare Regression durch eine **einfache Transformation** auf eine lineare Regression zurückführen
- In der Literatur finden sich folgende prominente Vertreter:

Funktionstyp	Ursprungsform	Transformation	Lineare Form
Potenziell	$y = a \cdot x^b$	$\tilde{a} = \ln(a) \wedge \tilde{x} = \ln(x) \wedge \tilde{y} = \ln(y)$	$\tilde{y} = \tilde{a} + b \cdot \tilde{x}$
Exponentiell	$y = a \cdot e^{b \cdot x}$	$\tilde{a} = \ln(a) \wedge \tilde{y} = \ln(y)$	$\tilde{y} = \tilde{a} + b \cdot x$
Logarithmisch	$y = a + b \cdot \ln(x)$	$\tilde{x} = \ln(x)$	$y = a + b \cdot \tilde{x}$
Hyperbolisch	$y = a + b/x$	$\tilde{x} = 1/x$	$y = a + b \cdot \tilde{x}$
Logistisch (mit Parameter c)	$y = \frac{c}{1 + e^{a+b \cdot x}}; b \leq 0$	$\tilde{y} = \ln\left(\frac{c}{y} - 1\right)$	$\tilde{y} = a + b \cdot x$

Thonemann (2010) S.44

Vorgehen der Transformation

1. Analyse der Ausgangsdaten, d.h. der Messpunkte und der Ausgangsform der Prognosefunktion
2. Durchführung der Transformation, d.h. die y- und x-Werte werden entsprechend der Transformationsart angepasst
3. Durchführung der linearen Regression, d.h. es wird nun eine lineare Funktion ermittelt
4. Durchführung der Rücktransformation, d.h. es wird nun die eigentliche Funktion bestimmt

Transformation – Beispiel

- Im Folgenden wollen wir die nicht-lineare Regression am **Beispiel der Potenzfunktion** exemplarisch durchführen
- Ziel ist wiederum die Minimierung des dabei auftretenden Fehlers, also des

$$MSE(a,b) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=1}^{N} \left(a \cdot (x_n)^b - y_n \right)^2$$

- Und dann nach der Transformation

$$MSE(\tilde{a},b) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=1}^{N} \left(\tilde{a} + b \cdot \tilde{x}_n - \tilde{y}_n \right)^2$$
$$= \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=1}^{N} \left(\ln(a) + b \cdot \ln(x_n) - \ln(y_n) \right)^2$$

Ergebnisse – Beispiel

- Wir führen die nicht-lineare Regression anhand der Potenzfunktion an unserem Beispiel durch und erhalten die folgenden Ergebnisse

Installierte Server (x_n)	Servicenach-frage (y_n)	$\ln(x_n)$	$\ln(y_n)$	$\ln(x_n)^2$	$\ln(x_n)$* $\ln(y_n)$	ln(a)	b
36	3,15	3,583518938	1,147402453	12,84160798	4,11173842	-0,052297329	0,336448114
270	6,3	5,598421959	1,840549633	31,34232843	10,30417348		
504	7,7	6,222576268	2,041220329	38,72045541	12,70164918		
612	8,4	6,416732283	2,128231706	41,17445319	13,65629309		
756	8,75	6,628041376	2,1690537	43,93093248	14,37657767		
972	9,45	6,879355804	2,246014742	47,32553628	15,45113455		
3150	43,75	35,32864663	11,57247256	215,3353138	70,60156639		

Neue Prognose

Servicenachfrage (y_n)	Prognosewerte	MSE
3,15	3,1688567	5,92625E-05
6,3	6,241878519	0,000563018
7,7	7,70043424	3,14274E-08
8,4	8,220246094	0,005385244
8,75	8,825936296	0,000961054
9,45	9,60466539	0,003986897
43,75	**43,76201724**	**0,010955507**

Fazit – Beispiel

- Die nicht-lineare Regression führte zu besseren Ergebnissen als die einfache lineare Regression
- Damit ist sie im vorliegenden Beispiel zu bevorzugen
- Allerdings ist zu prüfen, ob es noch weitere Strukturen gibt die eine weitere Verbesserung ermöglichen
- Ein Anwendungssystem zur Nachfrageprognose sollte die Standardtransformationen durchführen, um aus diesen Strukturen die beste zu ermitteln

Zusammenfassung

- Die Kausalanalyse bietet die Möglichkeit, die Nachfrage anhand einer maßgeblichen Einflussgröße zu prognostizieren
- Mit Hilfe erster Analysen ist dabei zu entscheiden, welchen Funktionsverlauf, d.h. welche Struktur die Nachfragefunktion haben könnte
  - Hier kann schon eine grafische Betrachtung sinnvoll sein
  - Aus den in Frage kommenden Kandidaten ist schließlich anhand des resultierenden MSE die beste Alternative auszuwählen
- Erweiterungen zur Regressionsanalyse erlauben zum Beispiel
  - die Berücksichtigung von mehr als einer Variable, d.h. von mehrdimensionalen Zusammenhängen
  - dies kann auch im Beispiel sinnvoll sein, denn die Zahl der Arbeitsstunden hängt auch von logistischen Gegebenheiten in den Regionen ab

3.3 Zeitreihenprognose

- Falls kein sinnvoller Nachfragetreiber ermittelt oder quantifiziert werden kann, bietet sich auch eine rein zeitliche Betrachtung an
- Hier dient dann der Zeitablauf als Einflussgröße, deren Ausgestaltung die Nachfrage bestimmt
- Grundsätzlich unterscheidet man in der Literatur drei Arten von zeitabhängigen Nachfrageverläufen
  - Verlauf auf konstantem Niveau, d.h. die Nachfrage schwankt um ein konstantes Niveau
  - Trend, d.h. die Nachfrage steigt oder fällt mit der Zeit
  - Saisonalität, d.h. die Nachfrage unterliegt periodischen Schwankungen

Illustration – Konstantes Niveau

(1) Konstantes Modell (= Horizontal-Modell)

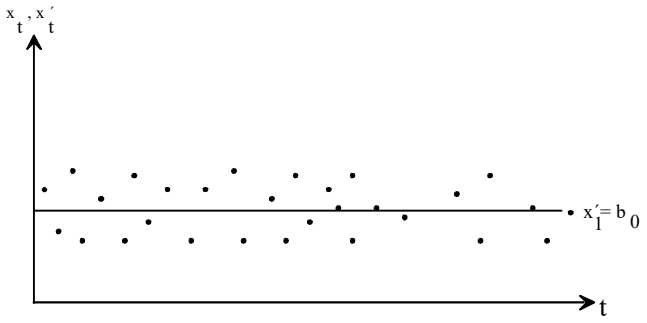


Illustration – Trend-Modell

(2) Lineares Modell (= Trend-Modell)

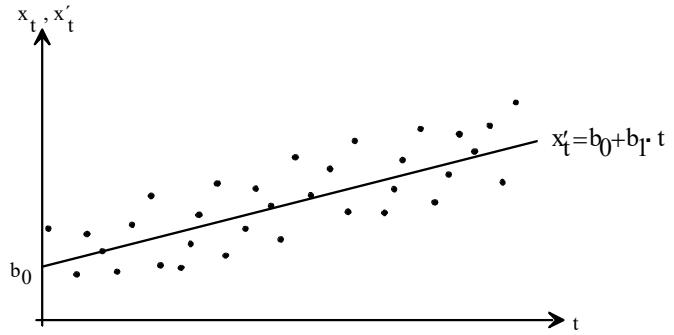


Illustration – Saison Modell Kategorie 1

(a) mit konstanter Amplitude

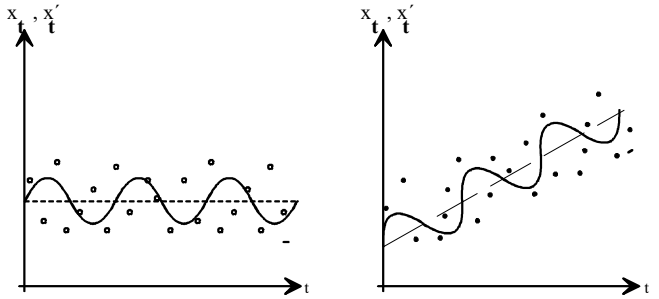


Illustration – Saison Modell Kategorie 2

(b) mit abnehmender Ampitude

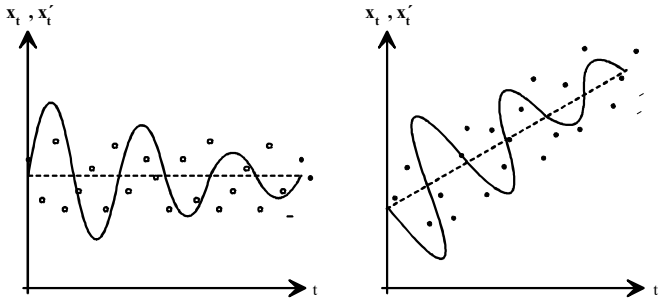
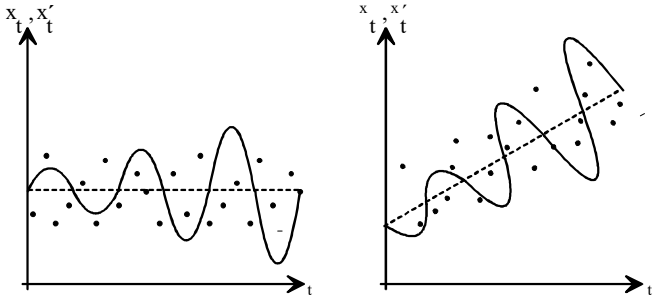


Illustration – Saison Modell Kategorie 3

(c) mit zunehmender Amplitude



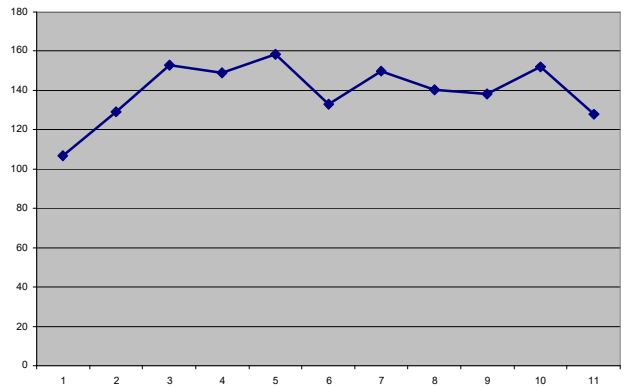
3.3.1 Konstantes Niveau

- Hier werden Produkte betrachtet, deren Nachfrage um einen bestimmten Wert schwankt
- Ein Beispiel hierfür sind Produkte des täglichen Konsums, für die keine besondere Saisonalität vorliegt
- Beispiele hierfür sind
  - Unterwäsche
  - Rasiercreme
  - Duschgel
  - Shampoo
  - u.v.m.

Eingesetzte Methoden

- Um das vorhandene Niveau abschätzen zu können, setzen wir die folgenden Verfahren ein
  - Gleitende Durchschnitte (MA = Moving Averages)
  - Verfahren der einfachen exponentiellen Glättung (SES = Single Exponential Smoothing)

Beispiel – Duschgelnachfrage



Siehe Thonemann (2010) S.49

Gleitende Durchschnitte

- Bei dieser Methode wird einfach der Durchschnittswert der letzten T Perioden als jeweils aktueller Prognosewert genommen
- Damit gilt

$$\hat{y}_{t,t+1} = \frac{1}{T} \cdot \sum_{\tau=t-T+1}^{t} y_\tau$$

- Wir werden uns dies anhand des Duschgel Beispiels anschauen

Einsatz der gleitenden Durchschnitte

t	*Absatz*	*Prognose mit T = 3*
1	129,2	
2	153	
3	149,1	
4	158,3	143,7666667
5	132,9	153,4666667
6	149,8	146,7666667
7	140,3	147
8	138,3	141
9	152,2	142,8
10	128,1	143,6
		139,5333333

Fehlerberechnung

- Wir bestimmen wiederum den MSE für die prognostizierten sieben Perioden

t	Absatz	Prognose	MSE
5	158,3	143,7666667	30,17396825
6	132,9	153,4666667	60,4268254
7	149,8	146,7666667	1,314444444
8	140,3	147	6,412857143
9	138,3	141	1,041428571
10	152,2	142,8	12,62285714
11	128,1	143,6	34,32142857
Summe			**146,3138095**

Optimierungsparameter T

- Offensichtlich wird bei der Methode der gleitenden Durchschnitte die Qualität der Prognose maßgeblich von der Länge der Zeitfensters bestimmt
- Je größer T gewählt wird, desto
  - mehr Daten können berücksichtigt werden und somit werden unter Umständen kurzzeitige Effekte nicht überschätzt
  - weniger Einfluss haben neuere Daten
- Ein guter Wert für T hängt somit von der Varianz der jeweiligen Untersuchung ab
- Andere Werte für T ergaben im Beispiel

T	1	2	3	4
MSE	269,1	144,3	146,4	187,3

Einfache Exponentielle Glättung

- Hier werden nicht länger alle Perioden gleich gewichtet, sondern spätere Perioden stärker als frühere
- Dazu wird ein Parameter α angegeben, der das Gewicht der letzten Periode beschreibt
- Darüber hinaus wird das Gewicht der vorangehenden Perioden entsprechend vermindert
- Dies geschieht durch die folgende Formel, die das Gewicht $c_{t-\tau}$ der Periode $t-\tau$ bei t bekannten Perioden beschreibt

$$c_{t-\tau} = \alpha \cdot (1-\alpha)^{\tau}$$

Minimierung des Prognosefehlers

- Damit ist die Berechnung der Prognosefunktion gesucht, die den quadratischen Fehler für die bekannten Nachfragen minimiert
  - Dazu wird allerdings angenommen, dass die Funktion um einen konstanten Wert b schwankt
  - Dieser Wert ist dann gegebenenfalls von Periode zu Periode zu korrigieren
- Hierfür sind Instrumente der Infinitesimalrechnung einzusetzen

Wir betrachten somit

- …die folgende Funktion

$$\text{Minimiere } F = \sum_{\tau=0}^{\infty} c_{t-\tau} \cdot \left(b - y_{t-\tau}\right)^2 = \sum_{\tau=0}^{\infty} \alpha \cdot (1-\alpha)^{\tau} \cdot \left(b - y_{t-\tau}\right)^2$$
$$= \sum_{\tau=0}^{\infty} \alpha \cdot (1-\alpha)^{\tau} \cdot \left(b^2 - 2 \cdot b \cdot y_{t-\tau} + \left(y_{t-\tau}\right)^2\right)$$

- …und bilden die Ableitung nach dem Prognosewert

$$\frac{\partial F}{\partial b} = \sum_{\tau=0}^{\infty} \alpha \cdot (1-\alpha)^{\tau} \cdot \left(2 \cdot b - 2 \cdot y_{t-\tau}\right)$$

Beachte

- Der Ausdruck

$$\sum_{\tau=0}^{\infty} a_0 \cdot q^{\tau}, |q| < 1$$

- ist eine konvergierende geometrische Reihe und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\tau=0}^{n} a_0 \cdot q^{\tau} = \lim_{n\to\infty} a_0 \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = a_0 \cdot \frac{1}{1-q}, |q| < 1$$

Wir substituieren entsprechend

- Setze nun

$$a_0 = 1 \wedge q = 1-\alpha \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{\tau=0}^{n} (1-\alpha)^{\tau} = \frac{1}{1-(1-\alpha)} = \frac{1}{\alpha}, |\alpha| < 1$$

- Damit gilt

$$\sum_{\tau=0}^{\infty} \alpha \cdot (1-\alpha)^{\tau} = \alpha \cdot \sum_{\tau=0}^{\infty} (1-\alpha)^{\tau} = \alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1$$

- Wodurch zudem gezeigt ist, dass bei unendlich vielen Perioden das Gesamtgewicht Eins erreicht wird

Ergebnis

- Wir setzen die Ableitung gleich Null und erhalten die Form

$$\sum_{\tau=0}^{\infty} \alpha \cdot (1-\alpha)^{\tau} \cdot (2 \cdot b - 2 \cdot y_{t-\tau}) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \sum_{\tau=0}^{\infty} \alpha \cdot (1-\alpha)^{\tau} \cdot b = 2 \cdot \sum_{\tau=0}^{\infty} \alpha \cdot (1-\alpha)^{\tau} \cdot y_{t-\tau}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\sum_{\tau=0}^{\infty} (1-\alpha)^{\tau} \cdot b}_{=\frac{1}{\alpha} \cdot b} = \sum_{\tau=0}^{\infty} (1-\alpha)^{\tau} \cdot y_{t-\tau} \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} \cdot b = \sum_{\tau=0}^{\infty} (1-\alpha)^{\tau} \cdot y_{t-\tau}$$

$$\Leftrightarrow b = \alpha \cdot \sum_{\tau=0}^{\infty} (1-\alpha)^{\tau} \cdot y_{t-\tau}$$

Bezeichner

- Wir schreiben im Folgenden für unsere Schätzung:

$$y'_{t+1} = \alpha \cdot \sum_{\tau=0}^{\infty} (1-\alpha)^{\tau} \cdot y_{t-\tau}$$

- Damit haben wir also eine erste Prognosefunktion gefunden
- Sie entspricht genau der unendlichen gewichteten Summe der Vergangenheitswerte
- Dies ist bei genauerer Überlegung auch nicht verwunderlich

Bleibt ein Problem …

- wer hat schon unendlich viele Perioden in der Vergangenheit zur Verfügung (unendliche Nachfragehistorie), die zur Betrachtung herangezogen werden könnten?
- Damit müssen wir eine kleine Modifikation an der Berechnung vornehmen
- Wir schreiben einfach

$$y'_{t+1} = \sum_{\tau=0}^{\infty} \alpha \cdot (1-\alpha)^{\tau} \cdot y_{t-\tau}$$

Grundidee

- Wir teilen zunächst die Berechnung in zwei Teile auf

$$y'_{t+1} = \underbrace{\sum_{\tau=t}^{\infty} \alpha \cdot (1-\alpha)^{\tau} \cdot y_{t-\tau}}_{\text{So nicht ermittelbar!}} + \sum_{\tau=0}^{t-1} \alpha \cdot (1-\alpha)^{\tau} \cdot y_{t-\tau}$$

- Wir setzen nun für alle (unbekannten) Vorperioden 0, -1, -2, … den fiktiven Wert y_0 ein
- Wir fragen nach dem Gewicht dieses Wertes und erhalten nach einigen Analysen

$$\sum_{\tau=t}^{\infty} \alpha \cdot (1-\alpha)^{\tau} = (1-\alpha)^{t}$$

Passt das auch?

- Wir zeigen die Behauptung wiederum durch Vollständige Induktion
- Zunächst für t=0
  - Dies ist trivial, da hier die gesamte Summe der Gewichte entsteht
  - also gilt hierfür

$$\sum_{\tau=t=0}^{\infty} \alpha \cdot (1-\alpha)^{\tau} = 1 = (1-\alpha)^{0}$$

Und für den Induktionsschritt …

- können wir folgern

$$\sum_{\tau=t}^{\infty} \alpha \cdot (1-\alpha)^{\tau} = \sum_{\tau=t-1}^{\infty} \alpha \cdot (1-\alpha)^{\tau} - \alpha \cdot (1-\alpha)^{t-1}$$

- Und damit

$$\sum_{\tau=t-1}^{\infty} \alpha \cdot (1-\alpha)^{\tau} - \alpha \cdot (1-\alpha)^{t-1}$$
$$\underbrace{=}_{\text{Induktionsvoraussetzung}} (1-\alpha)^{t-1} - \alpha \cdot (1-\alpha)^{t-1}$$
$$= (1-\alpha) \cdot (1-\alpha)^{t-1} = (1-\alpha)^{t}$$

Damit erhalten wir …

- die folgende zweigeteilte Formel

$$y'_{t+1} = (1-\alpha)^{t} \cdot y_0 + \sum_{\tau=0}^{t-1} \alpha \cdot (1-\alpha)^{\tau} \cdot y_{t-\tau}$$

- Es fehlt nun noch ein Wert für y_0
  - Wir wählen als eine einfache Lösung hierfür den Durchschnittswert von N Perioden
  - Dies führt zum Beispiel zu

$$y'_{t+1} = (1-\alpha)^{t} \cdot \sum_{k=1}^{N} \frac{y_k}{N} + \sum_{\tau=0}^{t-1} \alpha \cdot (1-\alpha)^{\tau} \cdot y_{t-\tau}, \text{ mit } 1 \le N \le t$$

Vereinfachung der Formel

- Im Folgenden wollen wir die Formel ein wenig vereinfachen
- Wir verwenden die folgenden Abkürzungen $\hat{y}_{t,t+1}$
- Diese definiert die Prognose für Periode t+1 auf der Basis der Periode t
- Damit gilt für t>0:

$$\hat{y}_{t,t+1} = (1-\alpha)^{t} \cdot y_0 + \sum_{\tau=0}^{t-1} \alpha \cdot (1-\alpha)^{\tau} \cdot y_{t-\tau} = \alpha \cdot y_t + (1-\alpha) \cdot \hat{y}_{t-1,t}, t \ge 1$$

- Und für t=0:

$$\hat{y}_{0,1} = y_0$$

Beweis durch vollständige Induktion

- Induktionsanfang für t=1
  - Hier erhalten wir einfach

$$y_{0,1} = (1-\alpha)^0 \cdot y_0 + \sum_{\tau=0}^{-1} \alpha \cdot (1-\alpha) \cdot y_{t-\tau} = (1-\alpha)^0 \cdot y_0 = y_0$$

  - und somit folgt die Behauptung unmittelbar
- Nun betrachten wir den Induktionsschritt für t+1
  - Wir betrachten deshalb die allgemeine Formel

$$\hat{y}_{t+1,t+2} = (1-\alpha)^{t+1} \cdot y_0 + \sum_{\tau=0}^{t} \alpha \cdot (1-\alpha)^{\tau} \cdot y_{t+1-\tau}$$

Induktionsschritt

- Damit gilt

$$\hat{y}_{t+1,t+2} = (1-\alpha)^{t+1} \cdot y_0 + \alpha \cdot (1-\alpha)^0 \cdot y_{t+1} + \sum_{\tau=1}^{t} \alpha \cdot (1-\alpha)^{\tau} \cdot y_{t+1-\tau}$$

- Um die Induktionsvoraussetzung verwenden zu können schreiben wir einfach

$$\hat{y}_{t+1,t+2} = (1-\alpha) \cdot \left((1-\alpha)^t \cdot y_0 \right) + \alpha \cdot (1-\alpha)^0 \cdot y_{t+1} + (1-\alpha) \cdot \left(\sum_{\tau=0}^{t-1} \alpha \cdot (1-\alpha)^{\tau} \cdot y_{t-\tau} \right)$$

- Somit gilt

$$\begin{aligned} \hat{y}_{t+1,t+2} &= \alpha \cdot (1-\alpha)^0 \cdot y_{t+1} + (1-\alpha) \cdot \left((1-\alpha)^t \cdot y_0 + \sum_{\tau=0}^{t-1} \alpha \cdot (1-\alpha)^{\tau} \cdot y_{t-\tau} \right) \\ &= \alpha \cdot (1-\alpha)^0 \cdot y_{t+1} + (1-\alpha) \cdot \left(\alpha \cdot y_t + (1-\alpha) \cdot \hat{y}_{t-1,t} \right) \end{aligned}$$

Konsequenz

- Und somit erhalten wir durch eine wiederholte Verwendung der Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned} \hat{y}_{t+1,t+2} &= \alpha \cdot y_{t+1} + (1-\alpha) \cdot \underbrace{\left(\alpha \cdot y_t + (1-\alpha) \cdot \hat{y}_{t-1,t} \right)}_{=\hat{y}_{t,t+1}} \\ &= \alpha \cdot y_{t+1} + (1-\alpha) \cdot \hat{y}_{t,t+1} \end{aligned}$$

schließlich die gewünschte Form

Interpretation

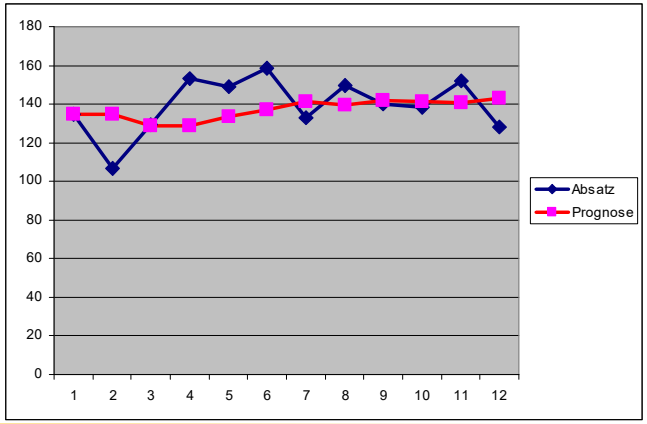
- Man sieht leicht an der obigen Definition der Prognosefunktion, dass in jeder Periode der aktuelle Bedarf zum Anlass genommen wird die letzte Prognose entsprechend zu korrigieren
- Dabei repräsentiert α das Ausmaß mit dem die notwendige Korrektur vorgenommen wird
- Offensichtlich gilt hierbei

  „Je kleiner α ist desto weniger fällt der letzte gemessene Absatz ins Gewicht“

Anwendung auf das Shampoo Beispiel (α=0,2)

t	Absatz	Prognose	Quadrierter Fehler
0	134,5	134,5	
1	106,8	134,5	
2	129,2	128,96	
3	153	129,008	
4	149,1	133,8064	
5	158,3	136,86512	459,4540806
6	132,9	141,152096	68,09708839
7	149,8	139,5016768	106,0554607
8	140,3	141,5613414	1,590982127
9	138,3	141,3090732	9,054521523
10	152,2	140,7072585	132,0831072
11	128,1	143,0058068	222,1830764
Mittelwert			142,6454738

Illustration des Ergebnisses



3.3.2 Trend-Modelle

- Trend-Modelle schätzen bei der Prognose gleichzeitig einen Trend in den Absatzzahlen ab und integrieren diesen
- Dabei folgt bei linearen Trends die erwartete Nachfrage einer Funktion der einfachen allgemeinen Form $a+b \cdot x$
- Eingesetzte Verfahren
  - Doppelte exponentielle Glättung
  - Regressionsanalyse zur Zeitreihenprognose

Regressionsanalyse

Wir ersetzen die Punktwolke $(x_1, y_1),\ldots,(x_k, y_k),\ldots,(x_K, y_K)$ durch $(1, y_1),\ldots,(\tau, y_\tau),\ldots,(t, y_t)$
und suchen die Koeffizienten der Funktion $\hat{y}_t = a + b \cdot t$

Damit können wir die lineare Regression anwenden und die Parameter der Prognosegerade berechnen:

$$b = \frac{\overline{ty} - \overline{t} \cdot \overline{y}}{\overline{t^2} - \overline{t}^2} = \frac{Cov(t,y)}{Var(t)}$$

$$a = \overline{y} - b \cdot \overline{t}$$

Bestimmung der Regressionskoeffizienten

- Wir verwenden die Ergebnisse der linearen Regression

$$a = \frac{\sum_{n=1}^{N}(x_n)^2 \cdot \sum_{n=1}^{N} y_n - \sum_{n=1}^{N} x_n \cdot \sum_{n=1}^{N} y_n \cdot x_n}{N \cdot \sum_{n=1}^{N}(x_n)^2 - \left(\sum_{n=1}^{N} x_n\right)^2} \wedge b = \frac{N \cdot \sum_{n=1}^{N} y_n \cdot x_n - \sum_{n=1}^{N} x_n \cdot \sum_{n=1}^{N} y_n}{N \cdot \sum_{n=1}^{N}(x_n)^2 - \left(\sum_{n=1}^{N} x_n\right)^2}$$

- und ersetzen die Veränderungen entsprechend

$$a = \frac{\sum_{\tau=1}^{t}\tau^2 \cdot \sum_{\tau=1}^{t} y_\tau - \sum_{\tau=1}^{t}\tau \cdot \sum_{\tau=1}^{t}\tau \cdot y_\tau}{t \cdot \sum_{\tau=1}^{t}\tau^2 - \left(\sum_{\tau=1}^{t}\tau\right)^2} \wedge b = \frac{t \cdot \sum_{\tau=1}^{t}\tau \cdot y_\tau - \sum_{\tau=1}^{t}\tau \cdot \sum_{\tau=1}^{t} y_\tau}{t \cdot \sum_{\tau=1}^{t}\tau^2 - \left(\sum_{\tau=1}^{t}\tau\right)^2}$$

Vereinfachungen

- Aufgrund der Gesetzmäßigkeiten

$$\sum_{\tau=1}^{t}\tau = 1+2+3+4+\ldots+t = \frac{1}{2}\cdot t\cdot(t+1)$$

- und

$$\sum_{\tau=1}^{t}\tau^2 = 1+4+9+16+\ldots+t^2 = \frac{1}{6}\cdot t\cdot(t+1)\cdot(2\cdot t+1)$$

- können wir formulieren

$$a_t = \frac{\left(\frac{1}{6}\cdot t\cdot(t+1)\cdot(2\cdot t+1)\right)\cdot\sum_{\tau=1}^{t} y_\tau - \left(\frac{1}{2}\cdot t\cdot(t+1)\right)\cdot\sum_{\tau=1}^{t}\tau\cdot y_\tau}{t\cdot\left(\frac{1}{6}\cdot t\cdot(t+1)\cdot(2\cdot t+1)\right) - \left(\frac{1}{2}\cdot t\cdot(t+1)\right)^2}$$

$$\wedge\, b_t = \frac{t\cdot\sum_{\tau=1}^{t}\tau\cdot y_\tau - \left(\frac{1}{2}\cdot t\cdot(t+1)\right)\cdot\sum_{\tau=1}^{t} y_\tau}{t\cdot\left(\frac{1}{6}\cdot t\cdot(t+1)\cdot(2\cdot t+1)\right) - \left(\frac{1}{2}\cdot t\cdot(t+1)\right)^2}$$

Resultat

- Durch Umformungen erhalten wir schließlich

$$a_t = \frac{\left(\frac{1}{3}\cdot t^3 + \frac{1}{2}\cdot t^2 + \frac{1}{6}\cdot t\right)\cdot\sum_{\tau=1}^{t} y_\tau - \left(\frac{1}{2}\cdot t^2 + \frac{1}{2}\cdot t\right)\cdot\sum_{\tau=1}^{t}\tau\cdot y_\tau}{\frac{1}{12}\cdot t^4 - \frac{1}{12}\cdot t^2} \wedge b_t = \frac{t\cdot\sum_{\tau=1}^{t}\tau\cdot y_\tau - \frac{1}{2}\cdot t\cdot(t+1)\cdot\sum_{\tau=1}^{t} y_\tau}{\frac{1}{12}\cdot t^4 - \frac{1}{12}\cdot t^2}$$

- und weiter

$$a_t = \frac{\left(4\cdot t^2 + 6\cdot t + 2\right)\cdot\sum_{\tau=1}^{t} y_\tau - \left(6\cdot t+6\right)\cdot\sum_{\tau=1}^{t}\tau\cdot y_\tau}{t^3 - t} \wedge b_t = \frac{12\cdot\sum_{\tau=1}^{t}\tau\cdot y_\tau - \left(6\cdot t+6\right)\cdot\sum_{\tau=1}^{t} y_\tau}{t^3 - t}$$

Einfachere Form

$$a_t = \frac{1}{t}\cdot\sum_{\tau=1}^{t} y_\tau + \underbrace{\frac{\left(3\cdot t^2 + 6\cdot t + 3\right)\cdot\sum_{\tau=1}^{t} y_\tau - \left(6\cdot t+6\right)\cdot\sum_{\tau=1}^{t}\tau\cdot y_\tau}{t^3 - t}}_{=\frac{1}{2}\cdot b_t\cdot(t+1)}$$

$$\wedge\, b_t = \frac{12\cdot\sum_{\tau=1}^{t}\tau\cdot y_\tau - \left(6\cdot t+6\right)\cdot\sum_{\tau=1}^{t} y_\tau}{t^3 - t}$$

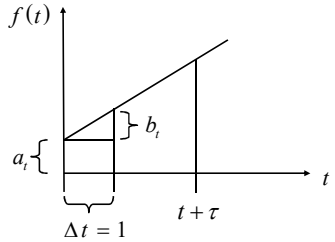
$$a_t = \frac{1}{t}\cdot\sum_{\tau=1}^{t} y_\tau + \frac{1}{2}\cdot b_t\cdot(t+1) \wedge b_t = \frac{12\cdot\sum_{\tau=1}^{t}\tau\cdot y_\tau - \left(6\cdot t+6\right)\cdot\sum_{\tau=1}^{t} y_\tau}{t^3 - t}$$

Erhalt der Prognosewerte

Schließlich erhalten wir durch die Formel

$$\hat{y}_{t,t+\tau} = a_t + b_t \cdot (t+\tau)$$

unsere Prognosewerte



Beispiel - Markteinführung

- Diesmal wird das Shampoo in einen neuen Markt eingeführt
- Folgende Zahlen haben sich dabei ergeben

Periode	Nachfrage
1	26,8
2	39,2
3	72,3
4	71,3
5	83,2
6	92,9
7	121,9
8	112,1
9	115,8
10	154,2
11	175,2

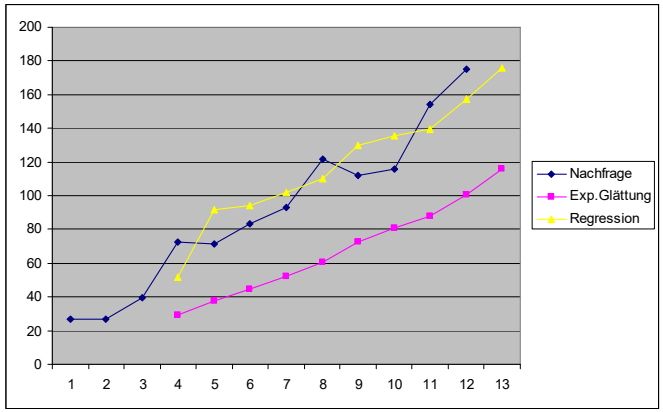
Beobachtungen - Beispiel

- Man sieht leicht, dass hier eine ständig ansteigende Nachfrage vorliegt
- Also ein positiver Trend
- Wir wollen nun die oben allgemein eingeführte Regressionsanalyse anwenden
- Daneben sollen die Ergebnisse der exponentiellen Glättung errechnet werden

Vergleich der Prognosen

t	y_t	ExpG	b_t	a_t	Prognose	Summe y_t	Summe $y_t t$
0	26,8						
1	26,8					26,8	26,8
2	39,2		12,4	14,4		66	105,2
3	72,3	*29,28*	22,75	0,6	*51,6*	138,3	322,1
4	71,3	*37,884*	16,66	10,75	*91,6*	209,6	607,3
5	83,2	*44,5672*	14,49	15,09	*94,05*	292,8	1023,3
6	92,9	*52,29376*	13,18571429	18,13333333	*102,03*	385,7	1580,7
7	121,9	*60,415008*	14,41428571	14,85714286	*110,4333333*	507,6	2434
8	112,1	*72,7120064*	12,90833333	19,375	*130,1714286*	619,7	3330,8
9	115,8	*80,58960512*	11,59166667	23,76388889	*135,55*	735,5	4373
10	154,2	*87,6316841*	12,38363636	20,86	*139,6805556*	889,7	5915
11	175,2	*100,9453473*	13,20727273	17,56545455	*157,08*	1064,9	7842,2
12		*115,7962778*			*176,0527273*		

Illustration des Vergleichs



Bemerkung

- Das Beispiel zeigt deutlich, dass das Prognoseverfahren der exponentiellen Glättung die tatsächliche Nachfrage unterschätzt
- Dies zeigt, dass dieses Verfahren nicht geeignet ist Trendverläufe adäquat zu prognostizieren
- Daher wurde das Verfahren zur **Doppelten Exponentiellen Glättung** erweitert

Doppelte Exponentielle Glättung

- Im Prinzip wird das gleiche Vorgehen verwendet, das bereits für die Einfache Exponentielle Glättung zur Anwendung kam
- Allerdings geht es hier darum den Achsenabschnitt a und den Anstieg b gleichzeitig zu prognostizieren
- Man unterscheidet hierzu zwei Vorgehensweisen
  - Verfahren mit einem Glättungsfaktor, bei denen die Parameter auf Basis der Minimierung des Vorhersagefehlers determiniert werden
  - Verfahren mit zwei Glättungsfaktoren α und β, die jeweils getrennt die Gewichtung der neu erhobenen Daten bei der aktuellen Prognose messen

Prinzipielles Vorgehen

- Wir prognostizieren in t

$$y_{t,t+\tau} = a_t + b_t \cdot \tau$$

- Wir minimieren damit den Prognosefehler der bekannten Perioden

$$\sum_{\tau=0}^{\infty} \alpha \cdot (1-\alpha)^{\tau} \cdot (a - b \cdot \tau - y_{t-\tau})^2$$

- Hierzu berechnen wir die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial F}{\partial a} = \sum_{\tau=0}^{\infty} 2 \cdot \alpha \cdot (1-\alpha)^{\tau} \cdot (a - b \cdot \tau - y_{t-\tau}) = 2 \cdot \alpha \cdot \sum_{\tau=0}^{\infty} (1-\alpha)^{\tau} \cdot (a - b \cdot \tau - y_{t-\tau})$$

$$= 2 \cdot \alpha \cdot \sum_{\tau=0}^{\infty} (1-\alpha)^{\tau} \cdot a - 2 \cdot \alpha \cdot \sum_{\tau=0}^{\infty} (1-\alpha)^{\tau} \cdot (b \cdot \tau + y_{t-\tau})$$

Prinzipielles Vorgehen

- und

$$\frac{\partial F}{\partial b} = \sum_{\tau=0}^{\infty} -2 \cdot \tau \cdot \alpha \cdot (1-\alpha)^{\tau} \cdot (a - b \cdot \tau - y_{t-\tau})$$
$$= -2 \cdot \alpha \cdot \sum_{\tau=0}^{\infty} \tau \cdot (1-\alpha)^{\tau} \cdot (a - b \cdot \tau - y_{t-\tau})$$

- Wir setzen diese Ableitungen gleich Null und lösen sie nach a und b auf. Damit erhalten wir das folgende System zur Lösung

Lösung des Systems

- Wir erhalten somit das System

$$\left| \begin{array}{l} 2 \cdot \alpha \cdot \sum_{\tau=0}^{\infty} (1-\alpha)^{\tau} \cdot a = 2 \cdot \alpha \cdot \sum_{\tau=0}^{\infty} (1-\alpha)^{\tau} \cdot (b \cdot \tau + y_{t-\tau}) \\ 2 \cdot \alpha \cdot \sum_{\tau=0}^{\infty} \tau \cdot (1-\alpha)^{\tau} \cdot a = 2 \cdot \alpha \cdot \sum_{\tau=0}^{\infty} \tau \cdot (1-\alpha)^{\tau} \cdot b + \sum_{\tau=0}^{\infty} \tau \cdot (1-\alpha)^{\tau} \cdot y_{t-\tau} \end{array} \right|$$

- und nach einer längeren Rechnung die Lösung

$$a_t = a_{t-1} + b_{t-1} + \left(2 \cdot \alpha - \alpha^2\right) \cdot \left(y_t - a_{t-1} - b_{t-1}\right)$$
$$b_t = b_{t-1} + \alpha^2 \cdot \left[y_t - a_{t-1} - b_{t-1}\right]$$

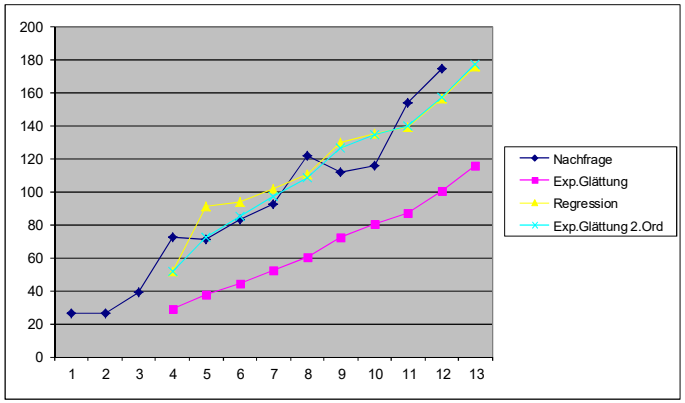
Anwendung auf das Beispiel

- Wir setzen die initialen Parameter wie folgt
  - Wir beginnen in der zweiten Periode
  - Der Achsenabschnitt wird auf die gesamte Nachfrage in dieser Periode gesetzt
  - Die Steigung wird als Durchschnittswert aus den vorangegangenen Perioden abgeleitet
- Damit ergeben sich die folgenden Werte

Ergebnisse der exp. Glättung 2.Ordnung (α=0,2)

t	y_t	b_t	a_t	Prognose
0	26,8			
1	26,8			
2	39,2	12,4	39,2	
3	72,3	13,228	59,052	51,6
4	71,3	13,1888	71,9272	72,28
5	83,2	13,11216	84,42624	85,116
6	92,9	12,926624	95,868576	97,5384
7	121,9	13,450816	113,512928	108,7952
8	112,1	12,85626624	121,6127962	126,963744
9	115,8	12,10950374	127,7481999	134,4690624
10	154,2	12,6831956	145,0209304	139,8577037
11	175,2	13,38303056	164,0026406	157,704126
12				177,3856712

Illustration der Ergebnisse



Gegenüberstellung der MSE

t	y_t	ExpG	MSE	Regression	MSE	ExpG 2.Ord	MSE
0	26,8						
1	26,8						
2	39,2						
3	72,3	29,28	205,6356	51,6	47,61	51,6	47,61
4	71,3	37,884	124,0698951	91,6	45,78777778	72,28	0,106711111
5	83,2	44,5672	165,8325818	94,05	13,08027778	85,116	0,407895111
6	92,9	52,29376	183,2074141	102,03	9,261877778	97,5384	2,390528284
7	121,9	60,415008	420,0449157	110,4333333	14,60938272	108,7952	19,08175367
8	112,1	72,7120064	172,3793378	130,1714286	36,28628118	126,963744	24,54787619
9	115,8	80,58960512	137,7524342	135,55	43,34027778	134,4690624	38,72598788
10	154,2	87,6316841	492,3711869	139,6805556	23,42380744	139,8577037	22,85571819
11	175,2	100,9453473	612,6392723	157,08	36,4816	157,704126	34,0117343
			2513,932638		**269,8812824**		**189,7382047**

Der Ansatz von Holt

- Im Ansatz von Holt wird eine größere Flexibilität durch die Verwendung von zwei Glättungsfaktoren angestrebt
- Hierfür schlägt Holt die folgenden Berechnungsregeln vor

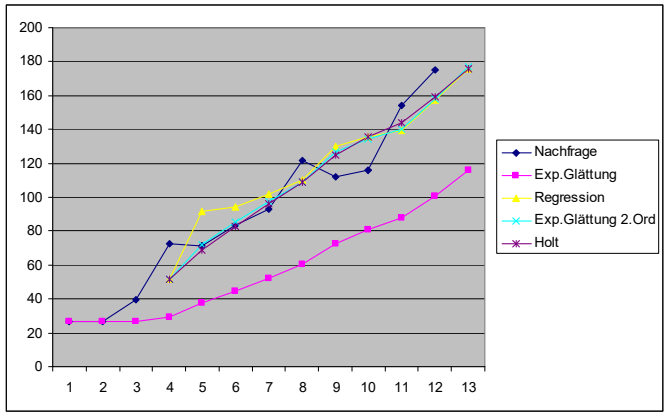
$$a_t = \alpha \cdot y_t + (1-\alpha)\cdot(a_{t-1} + b_{t-1})$$
$$b_t = \beta \cdot (a_t - a_{t-1}) + (1-\beta)\cdot b_{t-1}$$

- Man sieht, dass hier getrennt für beide Parameter eine exponentielle Glättung erster Ordnung durchgeführt wird
- Hierbei ist für den Achsenabschnitt a ein Abgleich der aktuellen Nachfrage mit der vorherigen Prognose durchzuführen
- Die neue Steigung ergibt sich schließlich aus der aktuell beobachteten Veränderung von a und der vorherigen Steigung

Ergebnisse der Methode nach Holt (α=0,2; β=0,2)

t	y_t	b_t	a_t	*Prognose*	MSE
0	26,8				
1	26,8				
2	39,2	12,4	39,2		
3	72,3	13,228	55,74	51,6	47,61
4	71,3	13,32128	69,4344	68,968	0,60424711
5	83,2	13,3390528	82,844544	82,75568	0,02193558
6	92,9	13,20770893	95,52687744	96,1835968	1,19800088
7	121,9	13,73432547	111,3676691	108,7345864	19,2586796
8	112,1	13,21424569	122,5015957	125,1019946	18,7835403
9	115,8	12,41761204	131,7326731	135,7158413	44,0711929
10	154,2	12,81960063	146,1602281	144,1502851	11,2218633
11	175,2	13,46840748	162,223863	158,9798287	29,2326618
					172,002121

Illustration der Ergebnisse aller Methoden



Beobachtungen

- Empirisch wurde aufgezeigt, dass Holts Methode häufig bessere Ergebnisse erzielen kann als die standardisierte exponentielle Glättung höherer Ordnung
- Vergleicht man Regression mit der exponentiellen Glättung höherer Ordnung wird deutlich dass
  - beide Ansätze lineare Trends relativ genau abschätzen können
  - die Regression – im Gegensatz zur exponentiellen Glättung höherer Ordnung – keine Gewichtungsunterscheidung bei vergangenen Perioden vornimmt
  - Holts' Methode eine höhere Flexibilität aufweist

3.3.3 Saisonalität

- Hier hängt nun die Nachfrage auch von einem immer wiederkehrenden Muster ab
- Es liegt somit eine gewisse Saisonalität vor, d.h. Nachfrageentwicklungen haben intensivere und schwächere Perioden
- Um dies ebenfalls geeignet abschätzen zu können, wird die Prognose weiter verfeinert
- Winters schlägt hierzu vor, die bekannte lineare Prognoseformel durch einen Faktor für die Saisonalität zu ergänzen
- Damit wird die Prognose mit Hilfe der folgenden Formel durchgeführt:

$$\hat{y}_{t,t+\tau} = \left(a_t + b_t \cdot \tau\right) \cdot c_{t+((\tau-1) MOD\ P)+1-P}$$

Der saisonale Wert

- Gibt an, welcher Anteil der Nachfrage in der jeweiligen Periode auftritt
- Wir gehen davon aus, dass *P* Perioden eine Saison bilden, d.h. diese beschreiben einen gesamten Zyklus
- Ist der saisonale Faktor auf z.B. 0,75 wissen wir, dass in der betrachteten Periode die Nachfrage um 25 Prozent gegenüber dem Normalniveau zurückgeht
- Somit entspricht die obige Formel der Formel, die bereits für die doppelte exponentielle Glättung zum Einsatz kam
- Lediglich die Saisonalität wurde zusätzlich integriert
- Im Folgenden müssen wir nun darlegen, wie die drei Parameter im Zeitablauf zu aktualisieren sind
- Die Saisonalität wird üblicherweise in Quartalen oder Perioden gemessen, die durchnummeriert sind

Update der Formel – Achsenabschnitt

- Update des Achsenabschnitts
  - Dieser wird **saisonneutral** aus der Nachfrage und der Prognose gebildet
  - Dazu wird aus der Nachfrage der saisonale Anteil herausgerechnet (durch Division) und diese dann mit Hilfe des Glättungsfaktors α mit der Prognose verrechnet

$$a_t = \alpha \cdot \frac{y_t}{c_{t-P}} + (1-\alpha) \cdot (a_{t-1} + b_{t-1})$$

Update der Formel – Steigung

- Update der Steigung
  - Hier wird – ebenfalls unabhängig von der Saisonalität – die neue Steigung der Prognosefunktion bestimmt, d.h. der alte Wert korrigiert
  - Dazu wird mit Hilfe eines zweiten Glättungsfaktors β die vorangegangene Steigung auf Basis der Veränderung des Achsenabschnittes angepasst
  - Beachte, dass die letzte Veränderung des Achsenabschnitts gerade die letzte Steigung gewesen ist und somit als Maß Verwendung findet
  - Somit erhalten wir die Formel

$$b_t = \beta \cdot (a_t - a_{t-1}) + (1-\beta) \cdot b_{t-1}$$

Update der Formel – Saisonalität

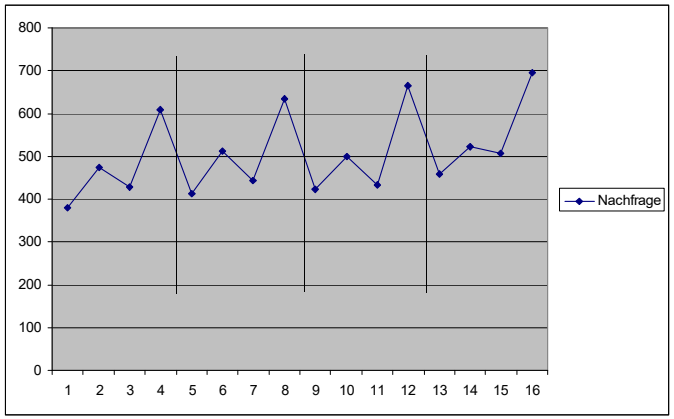
- Zuletzt bleibt noch der Update des Faktors, der die Saisonalität misst
- Hierfür wird ein dritter Glättungsfaktor γ verwendet
- Dieser verrechnet die aktuelle Saisonalität mit der zuletzt berechneten Saisonalität im letzten Zyklus (also P Perioden zurück). Dazu werden benötigt
  - Aktuelle Saisonalität: Hierzu wird die aktuelle Nachfrage auf den saisonunabhängigen Achsenabschnitt bezogen
  - Letzte Saisonalität: Hierzu wird der Faktor dieser Saison im vorangegangenen Zyklus (also vor genau P Perioden) herangezogen

$$c_t = \gamma \cdot \frac{y_t}{a_t} + (1-\gamma) \cdot c_{t-P}$$

Beispiel eines Spielzeugproduzenten

t	y_t	Prozent	Saison
1	379,1	74,86176935	1
2	472,8	93,36492891	2
3	428,4	84,5971564	3
4	607,7	120,0039494	4
5	413,8	81,71406003	1
6	512,8	101,2638231	2
7	443,1	87,5	3
8	634,7	125,335703	4
9	422,8	83,49131122	1
10	500,1	98,75592417	2
11	433,3	85,56477093	3
12	666,2	131,5560821	4
13	459,8	90,79778831	1
14	523	103,2780411	2
15	508	100,3159558	3
16	696,8	137,5987362	4
Durchschnittswert	506,4		

Illustration der Nachfrageentwicklung



Beobachtung

- Man sieht leicht, dass die Nachfrage zyklischen Schwankungen unterliegt
- Insbesondere fällt ein signifikanter Peak im jeweils vierten Quartal (Weihnachtsgeschäft) auf
- Mit Hilfe der Formeln zum Update können wir also von Periode zu Periode unsere Prognosefunktion justieren
- Allerdings bleibt das wichtige Problem einer **geeigneten Initialisierung unserer Parameter**, d.h. Werte für die erste oder ersten Saisons

Was ist zu tun?

Initialisierung

- Die Initialisierung ist bei der exponentiellen Glättung dritter Ordnung wesentlich komplexer
- Es empfiehlt sich mehrere Saisons (also mindestens zwei!) gleichzeitig zum Lernen heranzuziehen, da jede spezielle Saisonalität ansonsten nur einmal vorkommt und man so keine Vergleichsmaßstäbe hat
- Daher sollen im Beispiel zur Initialisierung im Folgenden zwei Zyklen betrachtet werden

Initialisierung 1 – Trend

- Zunächst wollen wir – unabhängig von der Saisonalität und ihrem Einfluss auf die konkreten Zahlen – herausfinden, welcher Trend vorliegt, d.h. welche Prognosefunktion entsteht
- Dazu sind zunächst die Durchschnittswerte der Saisons 1,2,…,N mit 1,2,…,P Perioden pro Saison heranzuziehen
- Diese ergeben sich wie folgt

$$\mu_i = \frac{\sum_{p=1}^{P} y_{(i-1)\cdot P+p}}{P} \quad \forall i = 1,\ldots,N$$

Ableitung der durchschnittlichen Steigung

- Damit erhalten wir als durchschnittliche periodenbezogene Steigung von Saison 1 bis N

$$b_{init} = \frac{\mu_N - \mu_1}{(N-1)\cdot P}$$

- Da wir nur zwei Saisons im Beispiel einsetzen, ist diese Rechnung sehr einfach
- Bei mehr Saisons kann sich auch hierfür wieder die Regression anbieten. Diese würde die Durchschnittswerte als Punktmengen verwenden

Initialisierung 2 - Achsenabschnitt

- Der initiale Achsenabschnitt ergibt sich aus dem Durchschnittsniveau in Saison 1 bezogen auf die erste Periode
- Konkret heißt dies, dass wir mit dem Durchschnittsniveau den mittleren Wert in dieser Saison mit P Perioden haben
- Ausgehend hiervon sind anschließend noch die Steigungen der Perioden bis zur Hälfte der Saison abzuziehen, d.h.

$$a_{init} = \mu_1 - b_{init} \cdot \frac{(P+1)}{2}$$

Am Beispiel

t	y_t	Prozent	Saison	
1	379,1	74,86176935	1	
2	472,8	93,36492891	2	
3	428,4	84,5971564	3	
4	607,7	120,0039494	4	**472**
5	413,8	81,71406003	1	
6	512,8	101,2638231	2	
7	443,1	87,5	3	
8	634,7	125,335703	4	**501,1**
9	422,8	83,49131122	1	
10	500,1	98,75592417	2	
11	433,3	85,56477093	3	
12	666,2	131,5560821	4	505,6
13	459,8	90,79778831	1	
14	523	103,2780411	2	
15	508	100,3159558	3	
16	696,8	137,5987362	4	546,9
Durchschnittswert	506,4			

Damit ergibt sich im Beispiel mit N=2 und P=4:

- Steigung

$$b_{init} = \frac{\mu_N - \mu_1}{(N-1)\cdot P} = \frac{501{,}1 - 472}{4} = 7{,}275$$

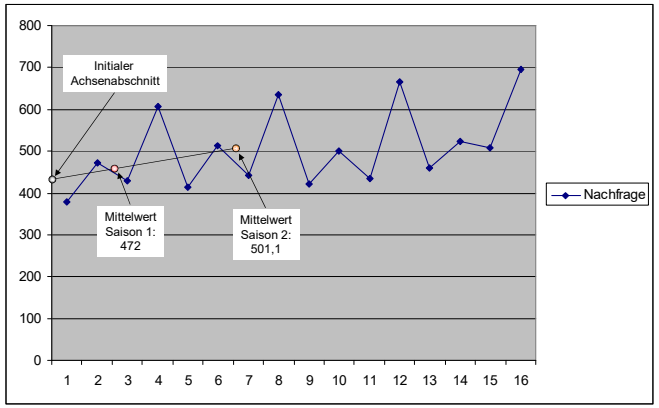
- Achsenabschnitt

$$a_{init} = \mu_1 - b_{init} \cdot \frac{(P+1)}{2} = 472 - 7{,}275 \cdot 2{,}5 = 453{,}8$$

- Trendfunktion somit

$$\hat{y}_t = 453{,}8 + 7{,}275 \cdot t \;\forall t = 1,\ldots,T$$

Illustration des Vorgehens



Initialisierung 3 – Trendbereinigung

- Wir „kennen“ nun den Trend, d.h. wir müssen ihn herausrechnen, um nun die Saisonalität adäquat abschätzen zu können
- Somit ist eine Trendbereinigung durchzuführen, d.h. wir berechnen

$$\tilde{y}_t = \frac{y_t}{a_{init} + b_{init} \cdot t} \;\forall t = 1,\ldots,T$$

Trendbereinigung am Beispiel

t	y_t	Prognose mit init. Daten	Bereinigt
1	379,1	461,075	0,822208968
2	472,8	468,35	1,009501441
3	428,4	475,625	0,900709593
4	607,7	482,9	1,2584386
5	413,8	490,175	0,8441883
6	512,8	497,45	1,030857373
7	443,1	504,725	0,877903809
8	634,7	512	1,239648438
9	422,8	519,275	0,814212123
10	500,1	526,55	0,949767354
11	433,3	533,825	0,811689224
12	666,2	541,1	1,231195712
13	459,8	548,375	0,838477319
14	523	555,65	0,941239989
15	508	562,925	0,902429276
16	696,8	570,2	1,222027359
Durchschnittswert	506,4		

Initialisierung 4 – Saisonaler Faktoren

- Nun berechnen wir die durchschnittlichen saisonalen Faktoren
- Dazu schauen wir uns alle Saisons an und berechnen den durchschnittlichen Faktor

$$\tilde{c}_t = \frac{\sum_{i=1}^{N} \tilde{y}_{t+(i-1)\cdot P}}{N} \quad \forall t = 1,\ldots,P$$

Am Beispiel

t	y_t	Prognose mit Init-Daten	Normalisiert	$\tilde{c}$
1	379,1	461,075	0,822208968	**0,833198634**
2	472,8	468,35	1,009501441	**1,020179407**
3	428,4	475,625	0,900709593	**0,889306701**
4	607,7	482,9	1,2584386	**1,249043519**
5	413,8	490,175	0,8441883	
6	512,8	497,45	1,030857373	
7	443,1	504,725	0,877903809	
8	634,7	512	1,239648438	

Normalisierung der Faktoren

- Häufig sind die Faktoren noch nicht normiert, d.h. die jeweilige Summe ist nicht gleich 4
- Daher ist eine entsprechende Normierung anzuschließen
- Dies geschieht mit der einfachen Formel

$$c_t = \tilde{c}_t \cdot \left(\frac{\sum_{\tau=1}^{P} \tilde{c}_\tau}{P} \right)^{-1} \quad \forall t = 1,\ldots,P$$

Beispiel – Nach der Normalisierung

t	y_t	$\tilde{c}$	c
1	379,1	0,833198634	0,834925205
2	472,8	1,020179407	1,022293443
3	428,4	0,889306701	0,89114954
4	607,7	1,249043519	1,251631812
		3,991728261	**4**

Bestimmung der relevanten Parameter

- Nun müssen noch die Parameter für die letzte Periode im „Beobachtungszeitraum“ bestimmt werden
- Bisher verfügen wir nur über die Parameter a_{init} und b_{init}
- Damit müssen für die Periode $N{\cdot}P$ diese Werte noch bestimmt werden
- Dies geschieht einfach durch

$$a_{N\cdot P} = a_{init} + b_{init} \cdot N \cdot P$$

- und

$$b_{N\cdot P} = b_{init}$$

Übertragung der saisonalen Faktoren

- Schließlich können wir einfach die saisonalen Faktoren übernehmen

$$c_{(N-1)\cdot P+p} = c_p \;\; \forall p = 1,\ldots,P$$

- Die erste prognostizierte Saison beginnt mit den Periodenindizes

$$t = N\cdot P+1,\ldots,N\cdot P+P$$
$$= 2\cdot 4+1,\ldots,2\cdot 4+4 = 9,10,11,12$$

und ein prognostizierter Wert ermittelt sich über

$$\hat{y}_{t,t+1} = (a_t + b_t)\cdot c_{t+1-P}$$

Anwendung am Beispiel

t	y_t	c_t	a_t	b_t
1	379,1			
2	472,8			
3	428,4			
4	607,7			
5	413,8	**0,834925205**		
6	512,8	**1,022293443**		
7	443,1	**0,89114954**		
8	634,7	**1,251631812**	**512**	**7,275**

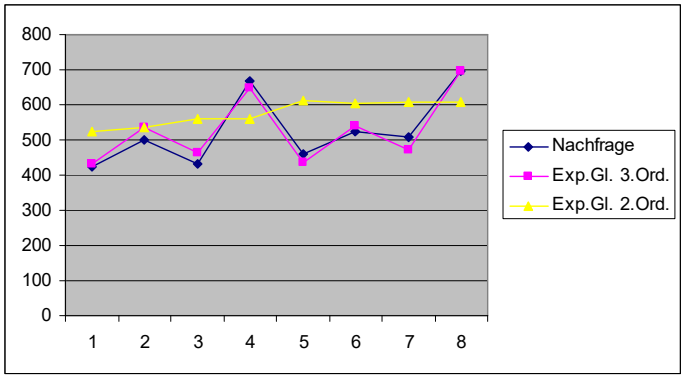
Damit können wir nun prognostizieren (α=0,2; β=0,2;γ=0,3)

t	y_t	c_t	a_t	b_t	Prognose
5	413,8	0,834925205			
6	512,8	1,022293443			
7	443,1	0,89114954			
8	634,7	1,251631812	512	7,275	
9	**422,8**	0,829929277	516,6985331	6,759706616	**433,5557859**
10	**500,1**	1,006020478	516,6054272	5,389144125	**535,1279262**
11	**433,3**	0,876290475	514,84084	3,958397849	**465,1752222**
12	**666,2**	1,25938849	521,4924212	4,497034525	**649,34563**
13	**459,8**	0,840433168	531,5961868	5,618380733	**436,5340488**
14	**523**	0,998174559	533,7456807	4,924603372	**540,4488558**
15	**508**	0,892075317	546,8795165	6,566449847	**472,0316393**
16	**696,8**	1,259300246	553,4136523	6,559987037	**697,0034797**

Vergleich: Doppelte Exponentielle Glättung

t	y_t	Prognose ExpGl 3.O.	MSE	a_t	b_t	Prognose ExpGl 2.O.	MSE
9	422,8	**433,5557859**	14,46086616	503,0114286	32,50371429	**523,0642857**	1256,615874
10	500,1	**535,1279262**	153,3694517	528,4321143	31,08710857	**535,5151429**	156,7790429
11	433,3	**465,1752222**	127,0037234	534,2753783	26,03833966	**559,5192229**	1991,411527
12	666,2	**649,34563**	35,5087234	581,4909744	30,27379094	**560,3137179**	1401,488091
13	459,8	**436,5340488**	67,66306064	581,3718122	24,19520033	**611,7647653**	2886,661236
14	523	**540,4488558**	38,05782113	589,0536101	20,89251983	**605,5670126**	852,1639454
15	508	**472,0316393**	161,7153714	589,5569039	16,81467463	**609,9461299**	1299,126675
16	696,8	**697,0034797**	0,005175499	624,4572628	20,43181149	**606,3715785**	1022,162426
			597,7841934				**10866,40882**

Illustration des Vergleichs



Bemerkungen

- Man sieht, dass die Berücksichtigung der saisonalen Faktoren die Prognosequalität wesentlich steigern kann
- Dabei ist die geeignete Wahl der drei Glättungsfaktoren ein wichtiges Optimierungsinstrument für eine adäquate Prognose
- Ein geeignetes Entscheidungsunterstützungssystem sollte daher unterschiedliche Parameterkonstellationen austesten und den sich ergebenden MSE vergleichen
- Die Exponentielle Glättung zweiter Ordnung dagegen kann den schnellen zyklischen Wechsel der Perioden nicht ausreichend nachvollziehen wodurch signifikante Fehler auftreten

Was ist zu tun?

- Wir haben verschiedene Verfahren zur Nachfrageprognose kennen gelernt
- Dies waren im Einzelnen
  - Lineare Regression
  - Nicht-Lineare Regression
  - Verfahren der exponentiellen Glättung 1. Ordnung
  - Verfahren der exponentiellen Glättung 2. Ordnung
  - Verfahren der exponentiellen Glättung 3. Ordnung
  - Lineare Regression in der Zeitreihenanalyse mit Trend

➢ **These:**

Wir sollten einfach das beste Verfahren, d.h. das flexibelste Verfahren nehmen

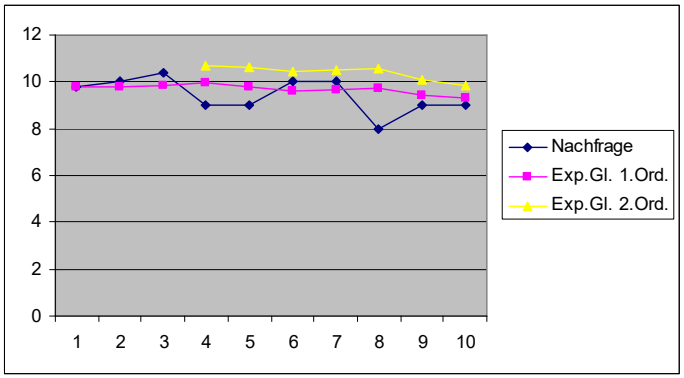
Problem

- Wenn wir die Exponentielle Glättung 3. Ordnung nehmen und …
  - es liegt keine Saisonalität vor oder
  - es gibt keinen Trend sondern nur ein Schwanken um das konkrete Niveau
- Frage: Kann dann das Verfahren das erkennen und trotzdem eine valide Prognose liefern?
  - Bei ausreichendem Datenmaterial erscheint dies sehr gut möglich
  - Insbesondere wenn die Glättungsfaktoren entsprechend gewählt werden
  - ABER: Was passiert, wenn es zu wenig Daten gibt an denen das System lernen kann?

Ein einfaches Beispiel

Periode	y_t	ExpGl 1.O.	a_t	b_t	ExpGl 2.O.	MSE 1	MSE 2
1	9,8	9,8					
2	10	9,8					
3	10,4	9,84	10,4	0,3			
4	9	9,952	10,36	0,232	10,7	0,129472	0,412857143
5	9	9,7616	10,2736	0,16832	10,592	0,08286208	0,362066286
6	10	9,60928	10,353536	0,1506432	10,44192	0,021808874	0,027899041
7	10	9,687424	10,40334336	0,130476032	10,5041792	0,013957679	0,036313809
8	8	9,7499392	10,02705551	0,029123256	10,53381939	0,437469601	0,917177244
9	9	9,39995136	9,844943016	-0,013123894	10,05617877	0,022851584	0,159359085
10	9	9,319961088	9,665455297	-0,046396659	9,831819121	0,014625014	0,09884615
						0,723046832	**2,014518758**

Illustration



Konsequenz

- Mehr Flexibilität im Ansatz führt leider nicht immer zu besseren Prognosen sondern können auch zu Fehlschlüssen verleiten
- Größere Glättungsfaktoren erlauben zwar eine schnellere Reaktion führen aber in anderen Szenarien zu Überschätzungen von Trends
  - ➢ Stichwort: Bullwhip Effekt im Supply Chain Management

3.4 Beurteilung der Prognose

- Für den Einsatz von Anwendungssystemen zur Nachfrageprognose ist es notwendig, geeignete Evaluationsverfahren zur Beurteilung einer Prognose anzuwenden
- Dabei lassen sich zwei Problemfelder unterscheiden
  - Messung der auftretender Fehler durch ein spezielles Fehlermaß, d.h. Messung eines aktuellen Fehlers
  - Erfassung von strukturellen Fehlern, d.h. Messung systematischer Probleme des eingesetzten Prognoseverfahrens

3.4.1 Prognosefehler

- Im Folgenden werden drei verschiedene Kennzahlen zur Fehlermessung vorgestellt
- Eine erste Kennzahl wurde bereits in den vorangegangenen Ausführungen verwendet
- Der **Mean Squared Error (MSE)** misst die mittlere quadratische Abweichung des Prognosewerts von der tatsächlichen Nachfrage für jede Periode

$$MSE = \frac{1}{T} \cdot \sum_{t=1}^{T} (\varepsilon_t)^2 \quad \text{mit } \varepsilon_t = \hat{y}_{t-1,t} - y_t$$

Der MAD (Mean Absolute Deviation)

- Hier wird der durchschnittliche absolute Prognosefehler ermittelt
- Dies ist die durchschnittliche absolute Abweichung des Prognosewertes von der tatsächlichen Nachfrage über einen Zeitraum von T Perioden

$$MAD = \frac{1}{T} \cdot \sum_{t=1}^{T} |\varepsilon_t|$$

- Dieser Wert lässt sich einfacher interpretieren als der MSE

Gegenüberstellung der Kennziffern

t	y_t	Prognose 1	Prognose 2	MSE 1	MSE 2	MAD 1	MAD 2
1	283	299	285	42,66666667	0,666666667	2,666666667	0,333333333
2	244	292	285	384	280,1666667	8	6,833333333
3	266	278	281	24	37,5	2	2,5
4	278	264	280	32,66666667	0,666666667	2,333333333	0,333333333
5	257	263	280	6	88,16666667	1	3,833333333
6	228	267	278	253,5	416,6666667	6,5	8,333333333
		Wert des Fehlermaßes		**742,8333333**	**823,8333333**	**22,5**	**22,16666667**
		Durchschnittswert pro Periode		**123,805556**	**137,305556**	**3,75**	**3,694444445**

Wir sehen unmittelbar…

- dass die Kennziffern nicht notwendigerweise zu identischen Ergebnissen führen
- dass der MAD immer dann besser ist, wenn die relativen Fehlerkosten mit ansteigendem Fehlerausmaß nicht größer werden, d.h. ein Fehler von +10, -10 verursacht die doppelten Fehlerkosten eines Fehlers von +5, -5
- Dagegen ist der MSE geeigneter, wenn diese relativen Fehlerkosten mit steigendem Fehlerausmaß größer werden
- Problematisch ist aber ein Vergleich zwischen unterschiedlichen Prognosen
- Was sagt zum Beispiel ein MAD von 1.000 allgemein aus?
- Hier ist die Höhe der Nachfrage von Bedeutung
- Deshalb wird eine normierte Größe eingeführt

Mean Absolute Percentage Error (MAPE)

- Hier wird nun die mittlere prozentuale Abweichung der Prognose vom tatsächlichen Wert bestimmt
- Damit gilt

$$MAPE = \frac{1}{T} \cdot \sum_{t=1}^{T} \frac{|\varepsilon_t|}{y_t}$$

- Hauptleistung der MAPE-Kennziffer ist die Schaffung der Vergleichbarkeit unterschiedlicher Nachfragen

Am Beispiel

t	y_t	Prognose 1	Prognose 2	MSE 1	MSE 2	MAD 1	MAD 2	MAPE 1	MAPE 2
1	283	299	285	42,666667	0,6666667	2,666667	0,3333333	0,00942285	0,00117785
2	244	292	285	384	280,16667	8	6,8333333	0,03278688	0,02800546
3	266	278	281	24	37,5	2	2,5	0,00751879	0,00939849
4	278	264	280	32,666667	0,666667	2,333333	0,3333333	0,00839328	0,00119904
5	257	263	280	6	88,16667	1	3,8333333	0,00389105	0,01491569
6	228	267	278	253,5	416,66667	6,5	8,3333333	0,02850877	0,03654971
Wert des Fehlermaßes				**742,8333**	**823,8333**	**22,5**	**22,16667**	**0,090522**	**0,091246**
Durchschnittswert pro Periode				**123,80555**	**137,30555**	**3,75**	**3,694445**	**0,015087**	**0,015208**

- Durch den MAPE haben wir eine weitere Kennziffer, die nun eine leichte Vorteilhaftigkeit der Prognose 1 andeutet
- Allerdings ist – wie oben bereits erwähnt – die wesentliche Stärke des MAPE durch die Schaffung der Vergleichbarkeit von unterschiedlichen Nachfrageszenarien gegeben

Konsequenz

- Man sieht, dass die bisherigen Kennzahlen positive und negative Fehlprognosen gleich bewerten, d.h. die Information des Vorzeichens geht vollständig verloren
- Der Grund hierfür ist, dass ein Ausgleich von positiven und negativen Abweichungen verhindert werden soll
- Damit soll erreicht werden, dass eine Prognose, die gleichmäßig über- und unterschätzt eine deutlich schlechtere Beurteilung erhält als eine exakte Vorhersage
- Allerdings gehen durch die Negation des Vorzeichens wesentliche Informationen verloren
  - So kann nicht mehr eine systematische Fehleranalyse vorgenommen werden
  - Zum Beispiel bleibt verborgen, ob systematisch unter- oder überschätzt wird, was auf ein grundsätzliches Problem deuten würde, das durch Verfahrenskorrektur zu beheben ist

Was ist zu tun?

3.4.2 Tracking Signal

- Strukturelle Prognosefehler entstehen immer dann, wenn ein Prognoseverfahren eingesetzt wird, das grundsätzlich für die aktuelle Situation nicht geeignet ist
- Beispielsweise liegt eine solche Situation vor, wenn ein Verfahren einen Trend nicht erfassen kann, dieser aber offensichtlich eintritt
- Das Problem ist aber, dass „die Realität schweigt" und wir nicht wissen, welche Besonderheiten in der betrachteten Nachfragereihe liegen
- Hierfür sind somit Kennzahlen zu entwickeln und anzuwenden, die innerhalb des Anwendungssystems angewandt, Aufschluss über die aktuelle Prognosequalität geben

Das Tracking Signal (TS)

- Dient zur Identifikation einer systematischen Über- oder Unterschätzung der gegenwärtigen Nachfrage
- Dazu wird der Smoothed Error zum Absolute Smoothed Error ins Verhältnis gesetzt, d.h. es gilt

$$TS_t = \frac{SE_t}{SAE_t}, \text{ mit}$$
$$SE_t = \phi \cdot \varepsilon_t + (1-\phi) \cdot SE_{t-1} \text{ und}$$
$$SAE_t = \phi \cdot |\varepsilon_t| + (1-\phi) \cdot SAE_{t-1}$$

Beobachtungen

- $SAE_t \geq SE_t$
- Durch eine „geeignete Vorgabe" des Glättungsfaktors wird eine Entwicklung nachvollzogen, die aufzeigt, ob Unter- oder Überschätzungen stattfinden
- So gilt im Einzelnen
  - $TS_t=1$: Generelle Überschätzung ist festzustellen.
    Achtung: Diese Einschätzung ist vor dem Hintergrund des gewählten Glättungsfaktors zu bewerten
  - $TS_t=-1$: Generelle Unterschätzung ist festzustellen.
    Achtung: Diese Einschätzung ist vor dem Hintergrund des gewählten Glättungsfaktors zu bewerten

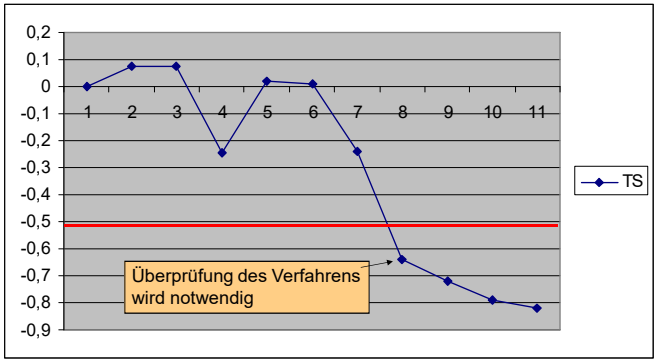
Welcher Grenzwert ist anzusetzen?

- Hauptproblem bleibt in diesem Zusammenhang, festzulegen, ab welchem Grenzwert für das Tracking Signal das Anwendungssystem von einem strukturellen Fehler ausgehen sollte, um entsprechende Maßnahmen einzuleiten, wie z.B.
  - Information des Benutzers
  - Wechsel des Verfahrens
  - Anstoß einer Neujustierung
- Dieser Grenzwert hängt maßgeblich von der Höhe des Glättungsfaktors ab
- Nach Trigg (1964) ist bei $\Phi=0,1$ als Grenzwert *0,51* bzw. *-0,51* zu wählen

Beispiel

t	y_t	Prognose	e	ABS(e)	SE	SAE	TS
0					0	0,8	0
1	10,9	11,5	0,6	0,6	0,06	0,78	0,076923077
2	11,5	11,5	0	0	0,054	0,702	0,076923077
3	14,2	11,5	-2,7	2,7	-0,2214	0,9018	-0,245508982
4	10	12,2	2,2	2,2	0,02074	1,03162	0,020104302
5	12	11,9	-0,1	0,1	0,008666	0,938458	0,009234297
6	14,8	12,06666667	-2,733333333	2,733333333	-0,265533933	1,117945533	-0,237519562
7	23,5	12,26666667	-11,23333333	11,23333333	-1,362313873	2,129484313	**-0,639738863**
8	22,3	16,76666667	-5,533333333	5,533333333	-1,779415819	2,469869215	**-0,72044941**
9	27,6	20,2	-7,4	7,4	-2,341474237	2,962882294	**-0,790269071**
10	28,9	24,46666667	-4,433333333	4,433333333	-2,550660147	3,109927398	**-0,820167104**

TS-Verlauf im Beispiel – Illustration



Siehe Thonemann (2010) S.71

Beobachtung

- Ab der siebenten Periode kann eine strukturelle Unterschätzung des angewendeten Prognoseverfahrens festgestellt werden
- So lässt sich folgern, dass das Verfahren den auftretenden Trend in der Nachfrage nicht adäquat erfasst
- Daher sind nun hier entsprechende Maßnahmen durch das Anwendungssystem einzuleiten

Was leistet das Tracking Signal?